

ע' פרופ' אהי כיתת האט ע' האחרת!!

מבחן גמר במתמטיקה

משך המבחן 4 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!
 יש לפתור שתיים מהשאלות 1-3, שאלה 5 ואחת מהשאלות 4 או 6, שאלה 8 ואחת מהשאלות 7 או 9!
 תיבדקנה רק התשובות הראשונות בכל מקבץ של שאלות בחירה!!!
 סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקודם עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!
בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה ברף הנוסחאות - חייבת הוכחה!
כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!

שאלה 1 (15%)

8% א. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $\log_3^2 x^2 - 2(2m+1)\log_3 x + 2m^2 - 18m + 78 = 0$

שני פתרונות שאחד מהם הוא ריבוע של השני?

7% ב. (1) שרטט גרף הפונקציה $y = |2x+3| - |x-1|$

(2) פתור את האי-שוויון $-1 < |2x+3| - |x-1| < 3$. (ניתן להיעזר בסעיף הקודם)

שאלה 2 (15%)

פתור: $\frac{2 + \cos x}{2 \sin^3 x - \cos x \sin 2x} \geq \frac{3}{2 \sin 4x}$ בקטע $(0, \pi)$.

שאלה 3 (15%)

6% א. הוכח את המשפט על חוצה-הזווית הפנימית במשולש.

9% ב. במעוין ABCD, דרך קדקוד הזווית החדה A, מעבירים ישר המחלק את הזווית ביחס 1:3

ואת הצלע BC ביחס 3:5. חשב את $\cos A$.

* * *

שאלה 4 (15%)

8% א. פתור את המשוואה $\frac{1 - \sin x + \sin^2 x - \dots + (-1)^n \sin^n x + \dots}{1 + \sin x + \sin^2 x + \dots + \sin^n x + \dots} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

7% ב. פתור: $\log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x} \leq 1$.

שאלה 5 (15%) - שאלת חובה!

במשולש ABC נקודה $E\left(2, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ היא אמצע הצלע AB,

נקודה $G\left(3, -\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ היא אמצע הצלע AC,

נקודה $F(a, 1, -5)$ היא אמצע הצלע BC.

נקודה $M(1, 1, 1)$ מונחת על הישר העובר דרך הקודקודים B ו-C.

5% א. מצא את כל הערכים האפשריים של הפרמטר a .

5% ב. עבור הפרמטר $a = 4$, מצא את השיעורים של קדקוד C.

5% ג. מצא את הזווית שממנה רואים מקדקוד C את הקטע EF.

שאלה 6 (15%)

- 7% א. עבור אילו ערכים של x האיבר השישי בפיתוח של הבינום $\left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^m$ שווה ל-21, אם נתון שהמקדמים הבינומיאליים של האיברים השני, השלישי והרביעי הם בהתאמה האיבר הראשון, השלישי והחמישי בסדרה חשבונית?
- 8% ב. מצא את מקדמי הפולינום $p(x) = 3x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ אם נתון שהגרף שלו עובר דרך הנקודה $(1, -5)$ והנגזרת שלו מתחלקת ללא שארית ב- $(x^2 - 1)^2$.

* * *

שאלה 7 (20%)

- 12% א. נתונה הפונקציה $f(x) = (e^2)^{2-x} + 2e^{x+1}$
- 1) חשב את ערכה המכסימלי ואת ערכה המינימלי בתחום $-3 \leq x \leq 4$.
- 2) האם לגרף הפונקציה יש אסימפטוטות בתחום $-\infty < x < \infty$? נמק!
- 3) האם לגרף הפונקציה יש נקודות פיתול בתחום $-\infty < x < \infty$? נמק!
- 4) צייר רשומת (סקיצה) של הגרף.
- 8% ב. מצא את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר x של התחום המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $y = x - \frac{1}{x}$, ועל-ידי ציר x , עבור $-2 \leq x \leq -1$.

שאלה 8 (20%) - שאלת חובה!

- בגליל מעגלי ישר חסום משולש שווה-צלעות ABC שצלעו a כך שקדקודיו B ו- C נמצאים על מעגל הבסיס העליון והקדקוד A נמצא על מעגל הבסיס התחתון. מישור המשולש יוצר עם הקו היוצר של הגליל AN זווית α .
- 3% א. הוכח: $BN = CN$.
- 5% ב. הוכח: אם K אמצע BC , אזי מישורי המשולשים ANK ו- ABC מאונכים זה לזה.
- 6% ג. סמן את הזווית α והסבר את מיקומה.
- 6% ד. חשב את רדיוס הבסיס של הגליל באמצעות a ו- α .

שאלה 9 (20%)

- 10% א. נתונים שני מעגלים: $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$
- 1) מצא על ציר x נקודה שאורכי המשיקים היוצאים ממנה אל המעגלים הנתונים יהיו שווים.
- 2) הוכח שהמשיקים היוצאים מכל נקודה שעל הישר $x - 3y + 3 = 0$ לשני המעגלים הנתונים שווים.
- 10% ב. 1) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = \sqrt[4]{8} \left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right)$, $z_2 = 1 + ia$, a מספר ממשי.
- מצא את כל הערכים של a שעבורם מתקיים $z_1^2 = z_2^3$.
- 2) פתור את המשוואה $z^4 + 8zi = 0$.

בהצלחה!

$$(\log_3 x^2)^2$$

$$\log_3^2 x^2 - 2(2m+1)\log_3 x + 2m^2 - 18m + 78 = 0$$

1) 2) 3)

(k)

$x > 0$

$$\alpha = \beta^2 / \log_3$$

Subst

$$\log_3 x = t$$

$$\log_3 \alpha = \log_3 \beta^2$$

$$4t^2 - 2(2m+1)t + 2m^2 - 18m + 78 = 0$$

$$\log_3 \alpha = 2 \log_3 \beta$$

$$t_1 = 2t_2$$

$$\rightarrow t_1 + t_2 = 2(2m+1)/4$$

$$\rightarrow t_1 \cdot t_2 = (2m^2 - 18m + 78)/4$$

$$\frac{9(m^2 - 9m + 39)}{4} = \frac{(2m+1)^2}{4}$$

$$9m^2 - 81m + 351 = 4m^2 + 4m + 1$$

$$5m^2 - 85m + 350 = 0$$

$$\begin{cases} 3t_2 = 2(2m+1)/4 \\ 2t_2^2 = (2m^2 - 18m + 78)/4 \end{cases}$$

$$t_2^2 = (m^2 - 9m + 39)/4$$

$$9t_2^2 = (2m+1)^2/4$$

$$m^2 - 17m + 70 = 0$$

$$m = 7 \checkmark$$

$$4t^2 - 2(15)t + 50 = 0$$

$$4t^2 - 30t + 50 = 0$$

$$2t^2 - 15t + 25 = 0$$

$$t_1 = 5 \quad t_2 = \frac{5}{2}$$

$$\log_3 X = 5$$

$$X = 3^5 \checkmark$$

$$\log_3 X = \frac{5}{2}$$

$$X = 3^{\frac{5}{2}} \checkmark$$

$$m = 10 \checkmark$$

$$4t^2 - 42t + 98 = 0$$

$$2t^2 - 21t + 49 = 0$$

$$t_1 = 7 \checkmark$$

$$t_2 = \frac{7}{2} \checkmark$$

17/32

②

$$y = |2x+3| - |x-1|$$

$$x \leq -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < x \leq 1$$

$$x > 1$$

$$y = -2x - 3 + x - 1$$

$$y = -x - 4$$

$$-\frac{3}{2}$$

$$y = 2x + 3 + x - 1$$

$$y = 3x + 2$$

$$1$$

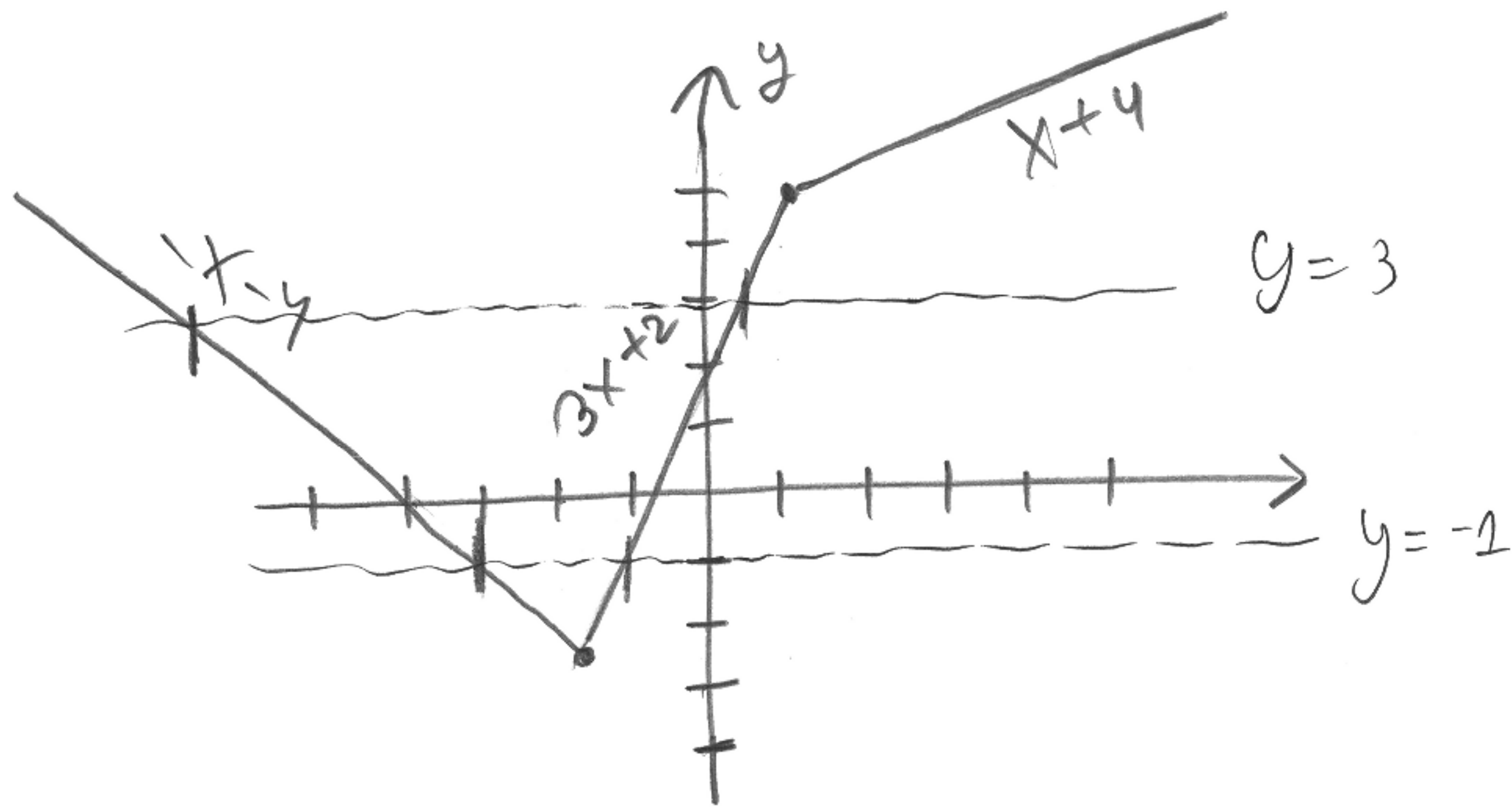
$$y = 2x + 3 - (x - 1)$$

$$y = 2x + 3 - x + 1$$

$$y = x + 4$$

$$(-1.5, -2.5)$$

$$(1, 5)$$



$-x - 4 = 3$ $\rightarrow -7 = x$	$3x + 2 = 3$ $3x = 1$ $x = \frac{1}{3}$	$3x + 2 = -1$ $3x = -3$ $x = -1$	$-x - 4 = -1$ $-3 = x$
-----------------------------------	---	----------------------------------	------------------------

$$-7 < x < -3$$

$$-1 < x < \frac{1}{3}$$

(2020)

$$\frac{2 + \cos x}{2 \sin^3 x - \cos x \sin 2x} \geq \frac{3}{2 \sin^4 x}$$

$$\frac{2 \sin^3 x - 2 \cos^2 x \sin x}{2 \sin x (\sin^2 x - \cos^2 x) - 2 \sin x \cos 2x}$$

$$\frac{2 + \cos x}{-2 \sin x \cos 2x} - \frac{3}{4 \sin x \cos x \cos 2x} \geq 0$$

$$\frac{-4 \cos x (2 + \cos x) - 3}{2 \sin x \cos x \cos 2x} \geq 0$$

- $\sin 4x \neq 0 \quad x \neq \frac{\pi k}{4}$
- $\sin x \neq 0 \quad x \neq \pi k$
- $\cos 2x \neq 0 \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$

$$x \neq \frac{\pi k}{4}$$

$$\frac{-4\cos^2 x - 8\cos x - 3}{\sin x \cos x \cos 2x} \geq 0$$

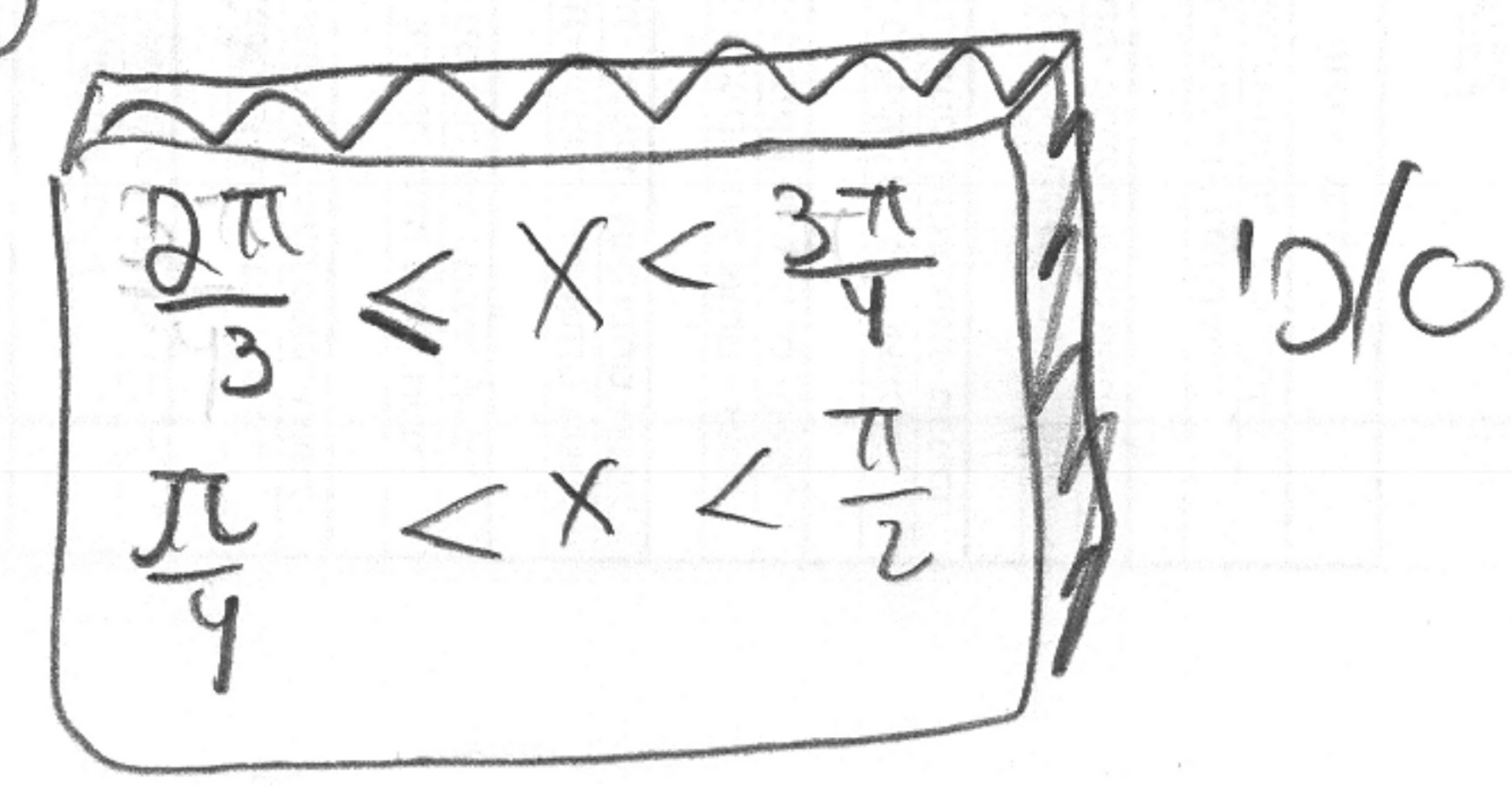
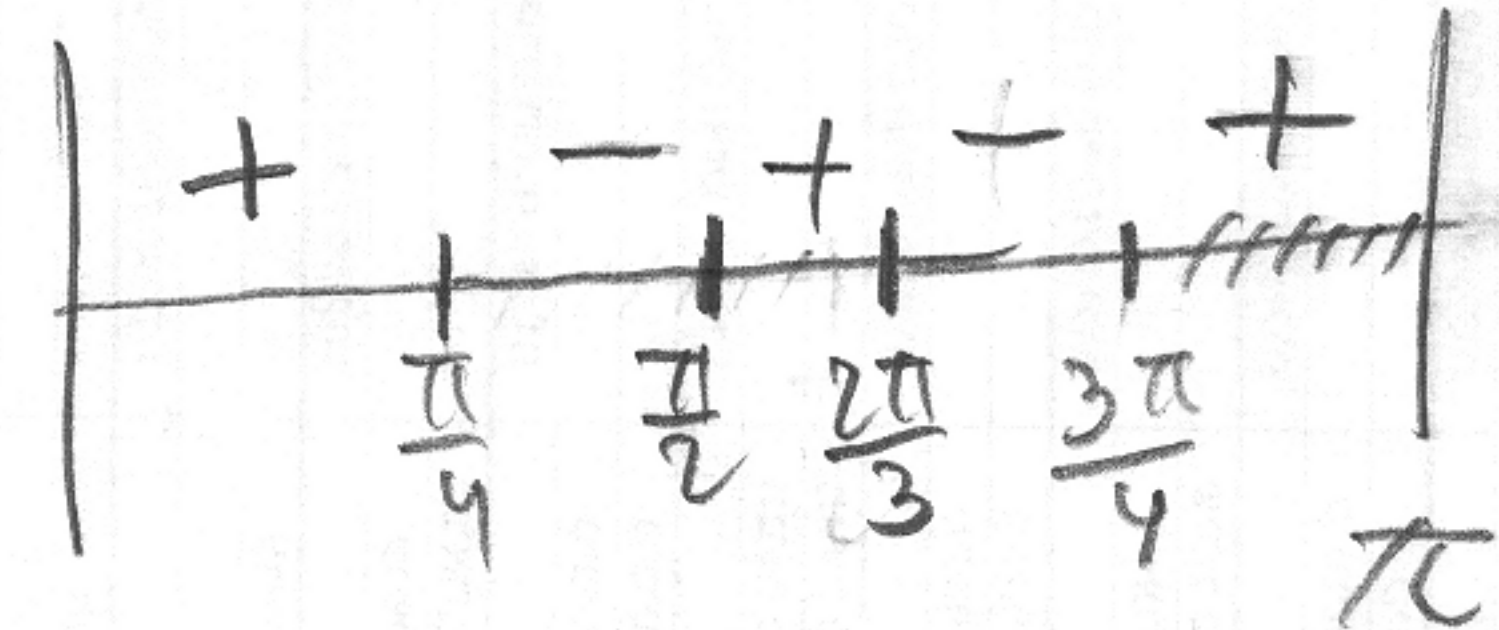
$$\frac{4\cos^2 x + 8\cos x + 3}{\sin x \cos x \cos 2x} \leq 0$$

$$\frac{2\cos x + 1}{\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x} \leq 0$$

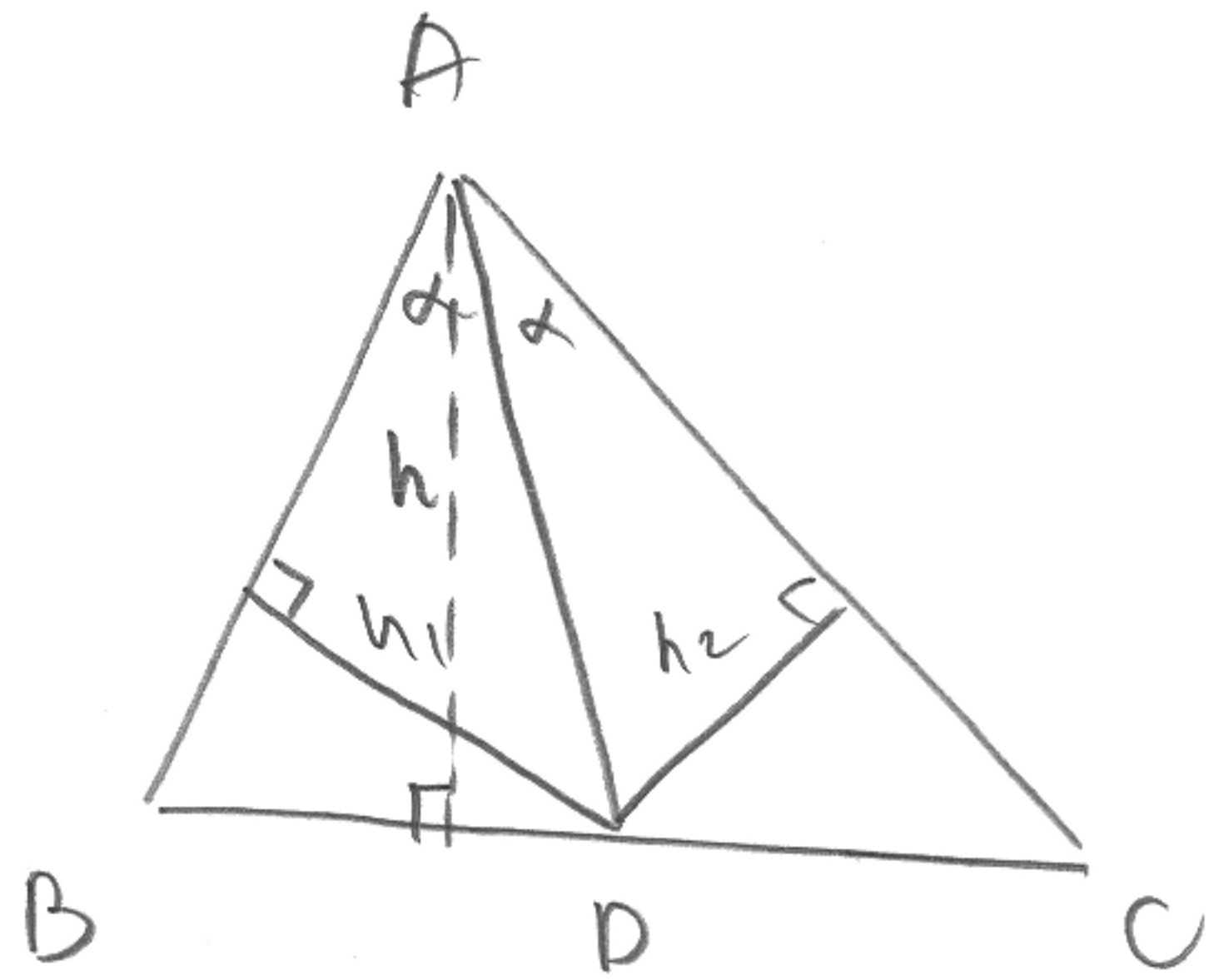
$$\frac{2\cos x + 1}{\cancel{\frac{1}{4}} \sin 4x} \leq 0$$

$\sin 4x \neq 0$ $\cos x = -\frac{1}{2}$
 $x \neq \frac{\pi k}{4}$ $x = \frac{2\pi}{3} \cdot \text{ק"מ/ב'ח/מ'}$

$$\begin{aligned}
 & 4t^2 + 8t + 3 \\
 & 4t^2 + 2t + 6t + 3 \\
 & 2t(2t+1) + 3(2t+1) \\
 & (2t+1)(2t+3) \\
 & (2\cos x + 1)(2\cos x + 3)
 \end{aligned}$$



(10)



$$h_1 = h_2 = H$$

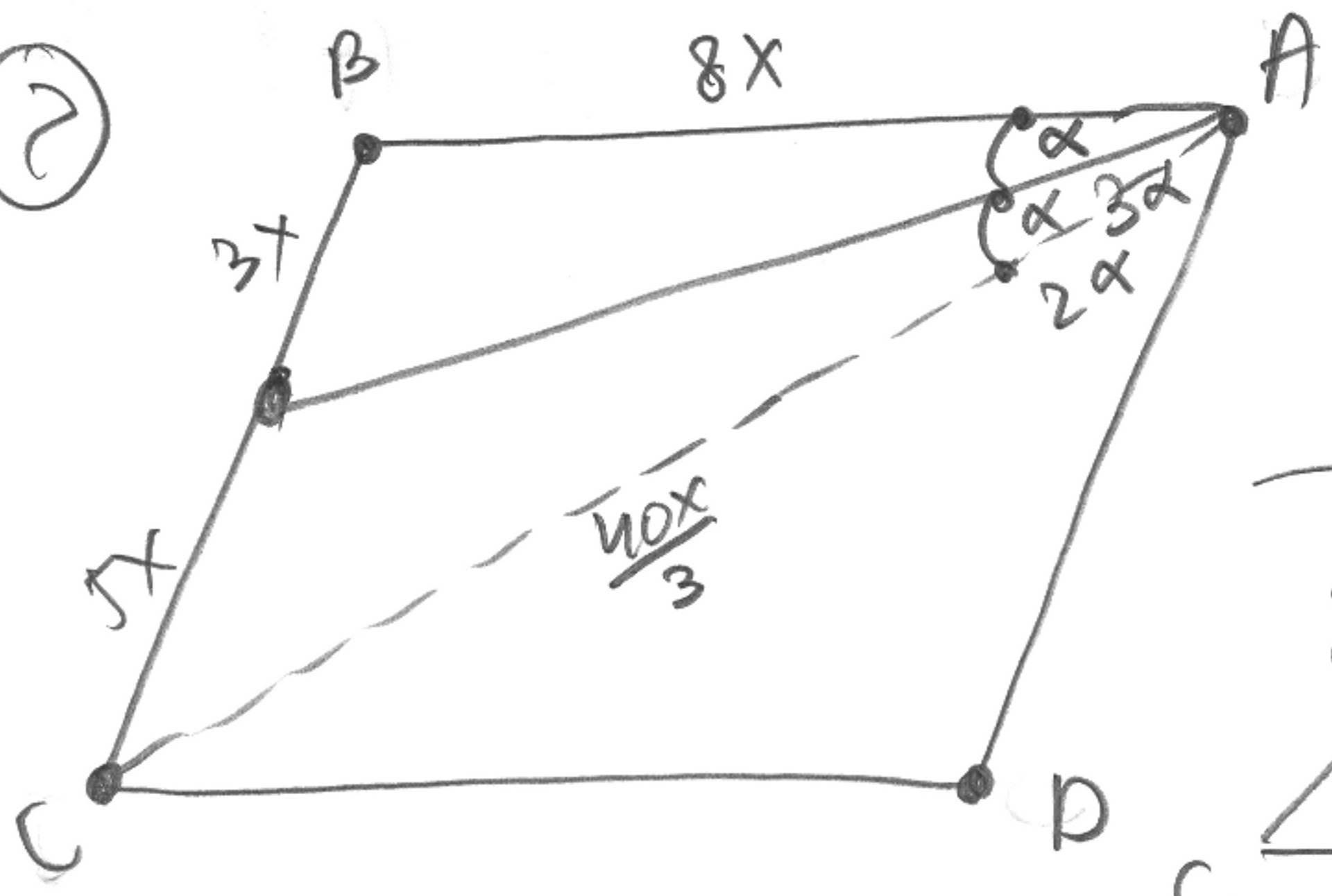
$$S_{ABD} = \frac{h_1 \cdot BD}{2} = \frac{H \cdot AB}{2}$$

$$S_{ADC} = \frac{h_2 \cdot DC}{2} = \frac{H \cdot AC}{2}$$

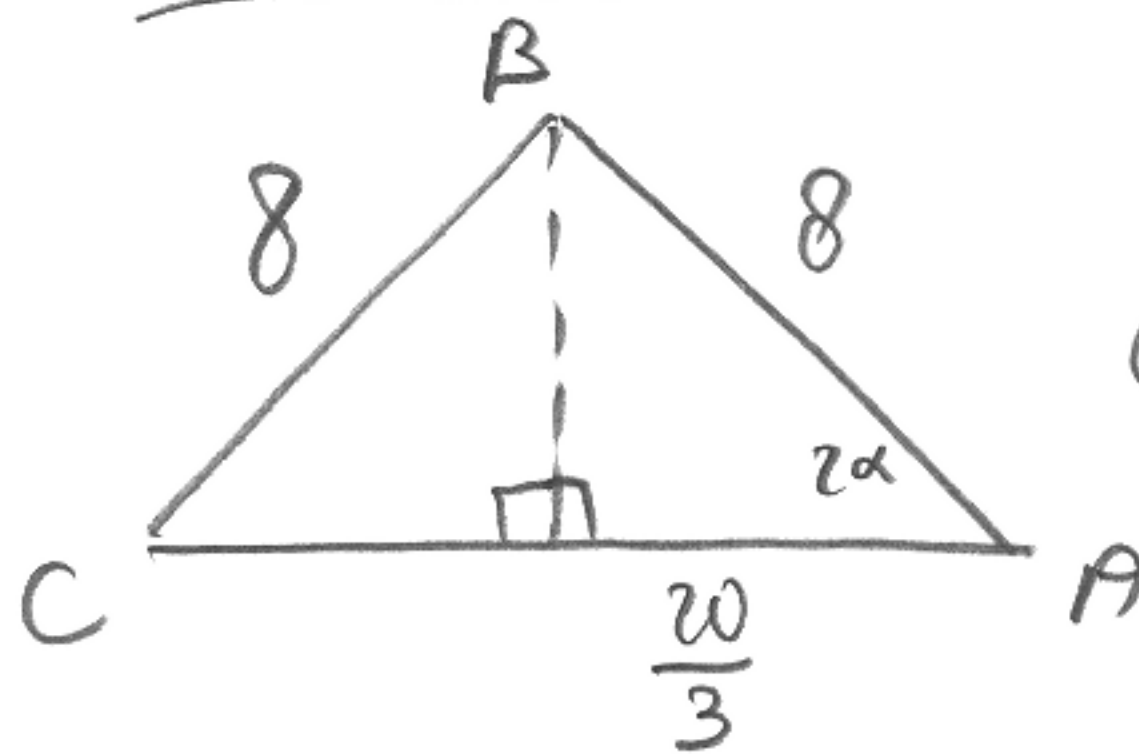
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{Sec. N}$$

(3, 7) dTe

(2)



$$\frac{3}{5} = \frac{8x}{AC} \Rightarrow AC = \frac{40x}{3}$$



$$\cos 2\alpha = \frac{20}{3 \cdot 8} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$$

$$\frac{2 \cdot 25}{36} - 1 = \left(\frac{7}{18} \right) //$$

1477E

$$\textcircled{E} \frac{1 - \sin x + \sin^2 x + \dots + (-1)^n \sin^n x + \dots}{1 + \sin x + \sin^2 x + \dots + \sin^n x + \dots} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\rightarrow q = -\sin x \quad / \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\rightarrow q = \sin x \quad / \quad \text{error}$$

$$\frac{\frac{1}{1 + \sin x}}{\frac{1}{1 - \sin x}} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{1 + (2\cos^2 x - 1)}$$

$$2\cos^2 x (1 - \sin x) = 2\sin^2 x (1 + \sin x)$$

$$\cancel{2} (1 - \sin^2 x) (1 - \sin x) = \cancel{2} \sin^2 x (1 + \sin x)$$

$$(1 - \sin x)^2 (1 + \sin x) - \sin^2 x (1 + \sin x) = 0$$

$$(1 + \sin x) ((1 - \sin x)^2 - \sin^2 x) = 0$$

$$(1 + \sin x) (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -1$$

for $x \in \mathbb{R}$

$\frac{\pi}{2}$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

0/0

②

$$\log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x} \leq 1$$

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ x &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\log_4 x + \frac{\log_4 2}{\log_4 x} - \frac{1}{2} \log_4 x - 1 \leq 0$$

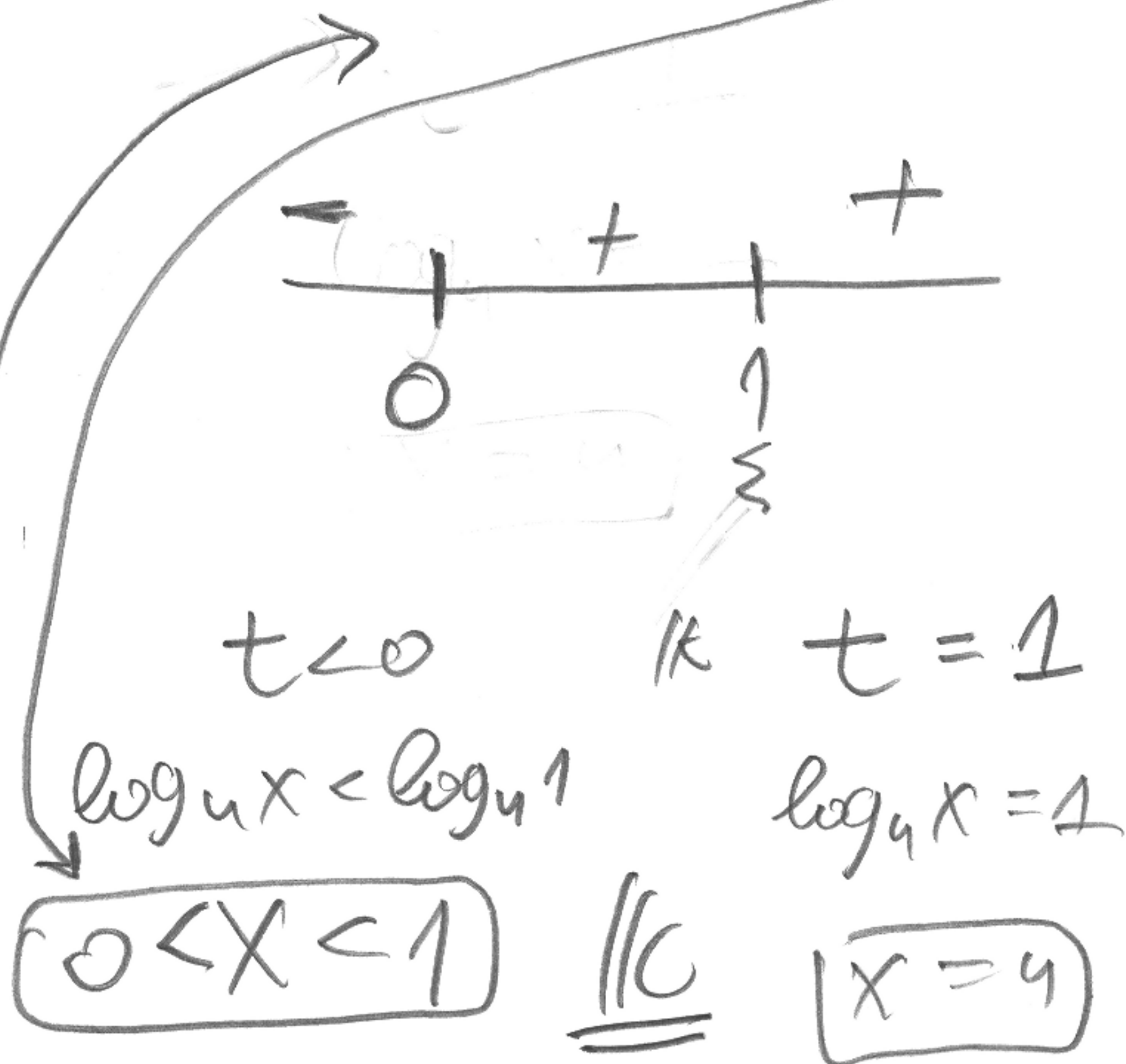
$$\log_4 x = t$$

$$t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2}t - 1 \leq 0$$

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} - 1 \leq 0$$

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{2t} \leq 0$$

$$\frac{(t-1)^2}{t} \leq 0$$



5 7/8

$E(2, \frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

$A(t, k, w) \quad (1, -2, -4)$

$G(3, \frac{1}{2}, -\frac{11}{2})$

B

M

$(1, 1, 1)$

$F(a, 1, -5)$

$(4, 1, -5)$

$(6-t, -1-k, -11-w)$

$(5, 1, -7)$

C

$(4-t, -1-k, -7-w)$

$(3, 1, -3)$

9x3xk xon EG (C)

EG // MF

$$(1, 0, -2) = m(a-1, 0, -6)$$

$$\begin{cases} 1 = m(a-1) \\ 0 = 0 \\ -2 = 6m \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$1 = \frac{1}{3}(a-1)$$

$$3 = a-1$$

$4 = a$ //

②

$$\frac{4-t+6-t}{2} = 4$$

$$10-2t = 8$$

$$2 = 2t$$

$$t = 1$$

$$\frac{-1-k-1-k}{2} = 1$$

$$-2-2k = 2$$

$$-4 = 2k$$

$$-2 = k$$

$$\frac{-7-w-11-w}{2} = -5$$

$$-18-2w = -10$$

$$-2w = 8$$

$$w = -4$$

$$G(5, 1, -7) //$$

②

$$\frac{(-3, -1.5, 3.5) \cdot (-1, 0, 2)}{|(-3, -1.5, 3.5)| |(-1, 0, 2)|} = \cos \alpha = \frac{3+7}{\sqrt{9+2.25+12.25} \sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{23.5} \sqrt{5}} //$$

7882
6

$$C_n^1, C_n^2, C_n^3$$

$$a_1, a_3, a_5$$

$$T_6 = T_{5+1} = C_n^5 A^{n-5} B^5$$

$$C_7^5 \cdot \sqrt{2^{\log(10-3^x)}}^2 \cdot \left(\sqrt{5^{(x-2)\log 3}} \right)^5$$

$$\frac{7!}{2 \cdot 5!} \cdot 2^{\log(10-3^x) + \log 3^{x-2}} = 21$$

$$21 \cdot 2^{\log(10-3^x) (3^x \cdot \frac{1}{9})} = 21$$

$$2^{\log C} C = 1$$

$$2C_n^2 = n + C_n^3$$

$$\frac{2 \cdot n!}{2(n-2)!} = n + \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$n(n-1) = n + \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n$$

$$n-1 = 1 + \frac{1}{6}(n-2)(n-1)$$

$$6n-6 = 6 + n^2 - 3n + 2$$

$$n^2 - 9n + 14 = 0$$

$$(n-2)(n-7) = 0$$

9/10-11 Kd ↓

$$n=7$$

(6)

~~127~~
~~1331~~
~~14644~~

$$\log C \cdot C = 0$$

$$10^0 = C \cdot C$$

$$1 = (10-t) \cdot \frac{1}{9}t$$

$$9 = 10t - t^2$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$(t-9)(t-1) = 0$$

$$3^x = 9 \quad 3^x = 1$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\boxed{x=0}$$

$$3^x = t$$

$$x=2$$

$$(1+1)^7$$

$$T_6 = C_7^5 = 21$$

✓

mm

$$x=0$$

$$\left(2^{\log 9} + \sqrt[5]{2^{-2\log 3}} \right)^7$$

$$C_7^5 \cdot 2^{\log 9} \cdot 2^{\log \frac{1}{9}}$$

$$C_7^5 \cdot 2^{\log 1}$$

$$C_7^5 = 21 \quad \checkmark$$

②

$$p(x) = 3x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$p(1) = -5$$

$$p'(x) = 15x^4 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$p''(x) = 60x^3 + 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$\frac{p'(x)}{(x-1)^2(x+1)^2} = w(x) + \frac{0}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$p'(1) = 0$$

$$p'(-1) = 0$$

$$p''(1) = 0$$

$$p''(-1) = 0$$

$$15 + 4a + 3b + 2c + d = 0 \quad \oplus$$

$$15 - 4a + 3b - 2c + d = 0 \quad \oplus$$

$$60 + 12a + 6b + 2c = 0$$

$$-60 + 12a - 6b + 2c = 0$$

$$30 + 6b + 2d = 0$$

$$2d = 30$$

$$\boxed{d = 15}$$

$$120 = -12b$$

$$\boxed{b = -10}$$

$$\ominus 8a + 4c = 0$$

$$\oplus 24a + 4c = 0$$

$$a = 0$$

$$c = 0$$

$$p(1) = -5$$

$$3 + a + b + c + d + e = -5$$

$$3 + (-10) + 15 + e = -5$$

$$\underline{e = -13}$$

$$p(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x - 13$$

(c) $y = e^{4-2x} + 2e^{x+1}$

הגובה של $\mu \in \mathbb{R}$
 נגזרת

הגובה

(1) $y' = e^{4-2x}(-2) + 2e^{x+1} = 2(e^{x+1} - e^{4-2x})$

$e^{x+1} = e^{4-2x}$

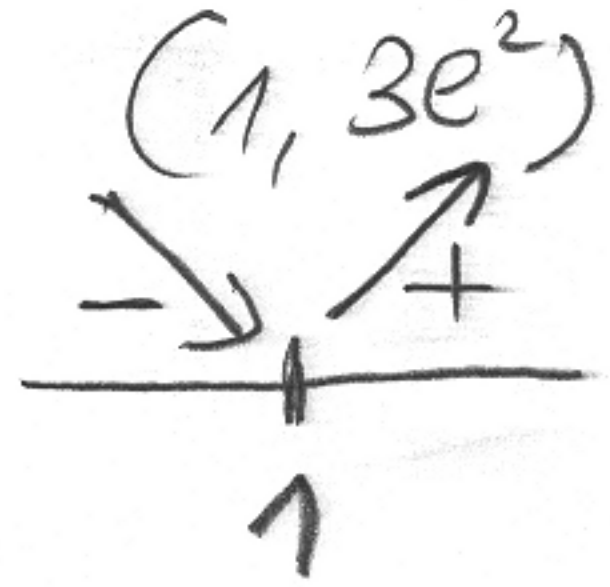
$x+1 = 4-2x$

$3x = 3$

$x = 1$

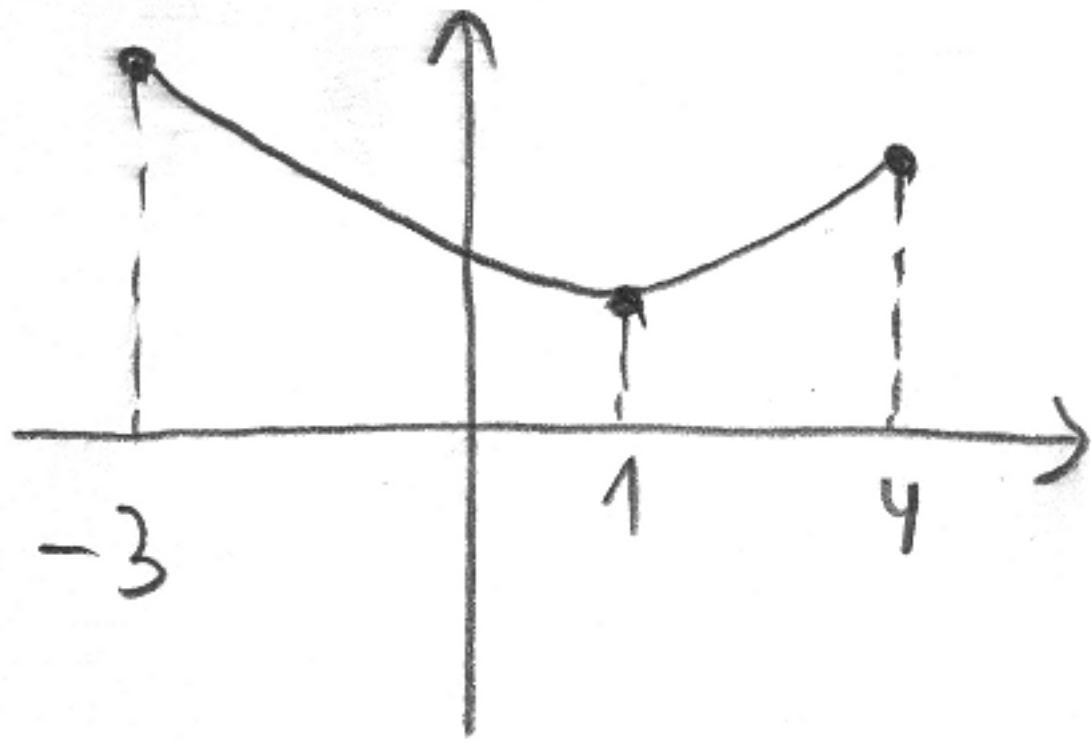
$y_{min} = 3e^2$

$y_{max} = e^{10} + \frac{2}{e^2}$



$F(-3) = e^{4+6} + 2e^{-2} = e^{10} + 2e^{-2}$

$F(4) = e^{4-8} + 2e^5 = 2e^5 + e^{-4}$



הגובה של $\mu \in \mathbb{R}$
 נגזרת

(2) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4-2x} + 2e^{x+1}}{x}$

$\frac{e^4 \rightarrow 0}{e^x \cdot x} + \frac{2e^2 \cdot e}{x} =$

\Downarrow
 $\frac{2ee^x}{1} = \infty$

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{4-2x} + 2e^{x+1}}{x}$

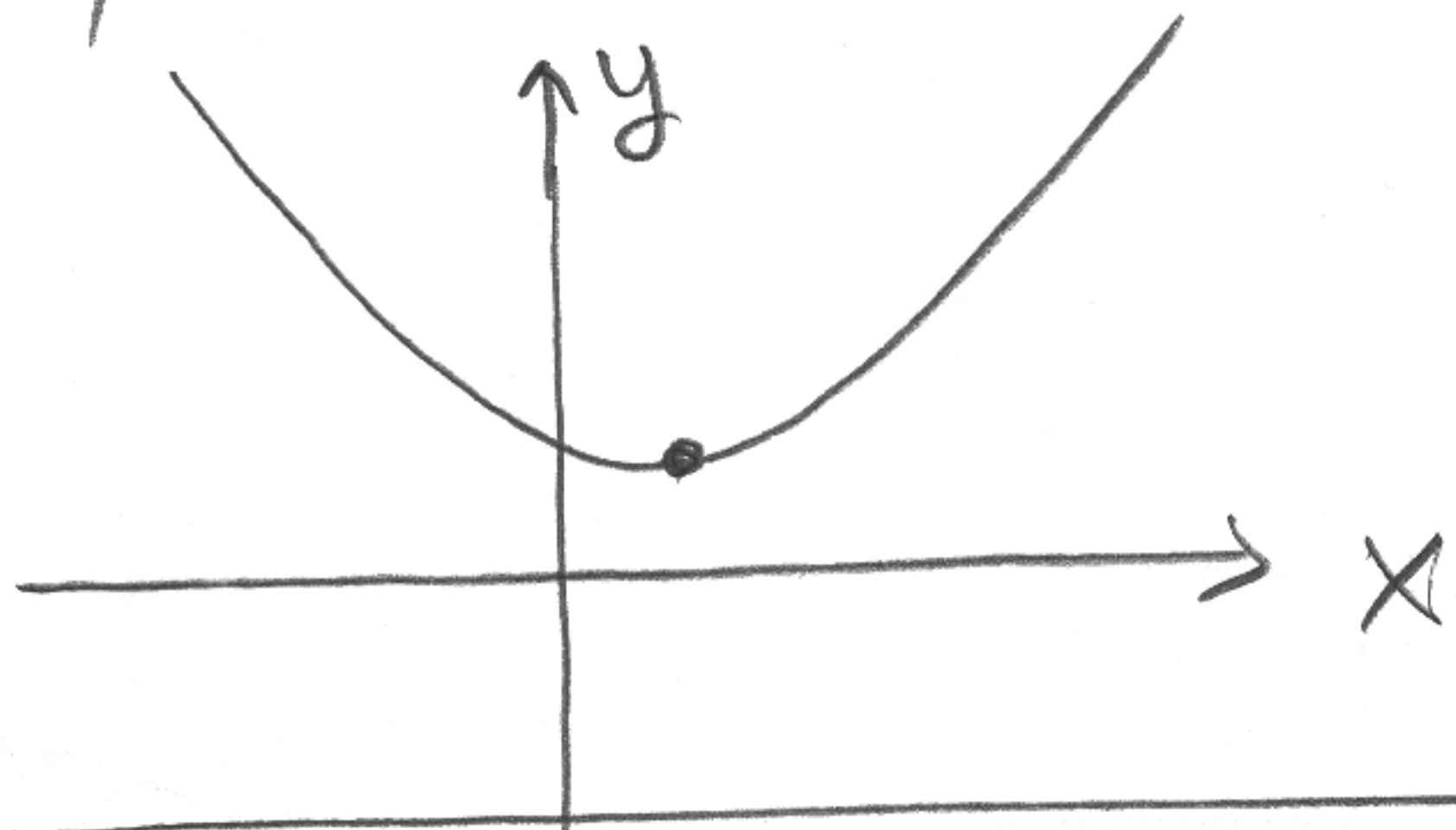
$\frac{e^4 e^{-2x}}{x} + \frac{2e^2 \rightarrow 0}{e^x \cdot x} =$

$\frac{e^4 \cdot e^{-2x}(-2)}{1} = \infty$

$$\textcircled{3} \quad y'' = e^{x+1} - e^{4-2x} \quad (-2) = e \cdot e^x + \frac{2e^4}{e^{2x}} = \frac{e \cdot e^{3x} + 2e^4}{e^{2x}}$$

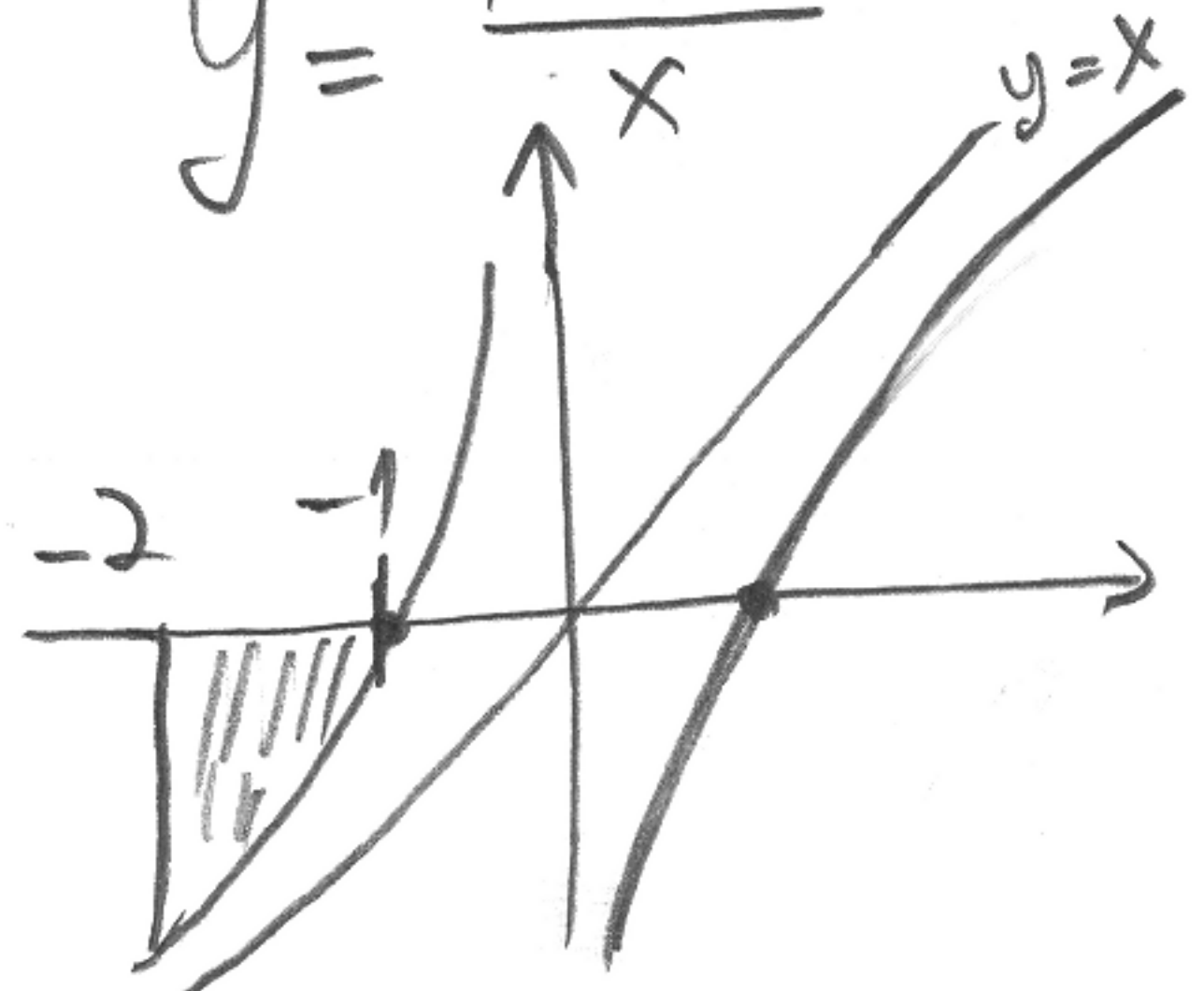
מילוי \Leftrightarrow נקודה קיצונית \Leftrightarrow נקודה קיצונית \Leftrightarrow נקודה קיצונית

$\textcircled{4}$



$\textcircled{2}$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

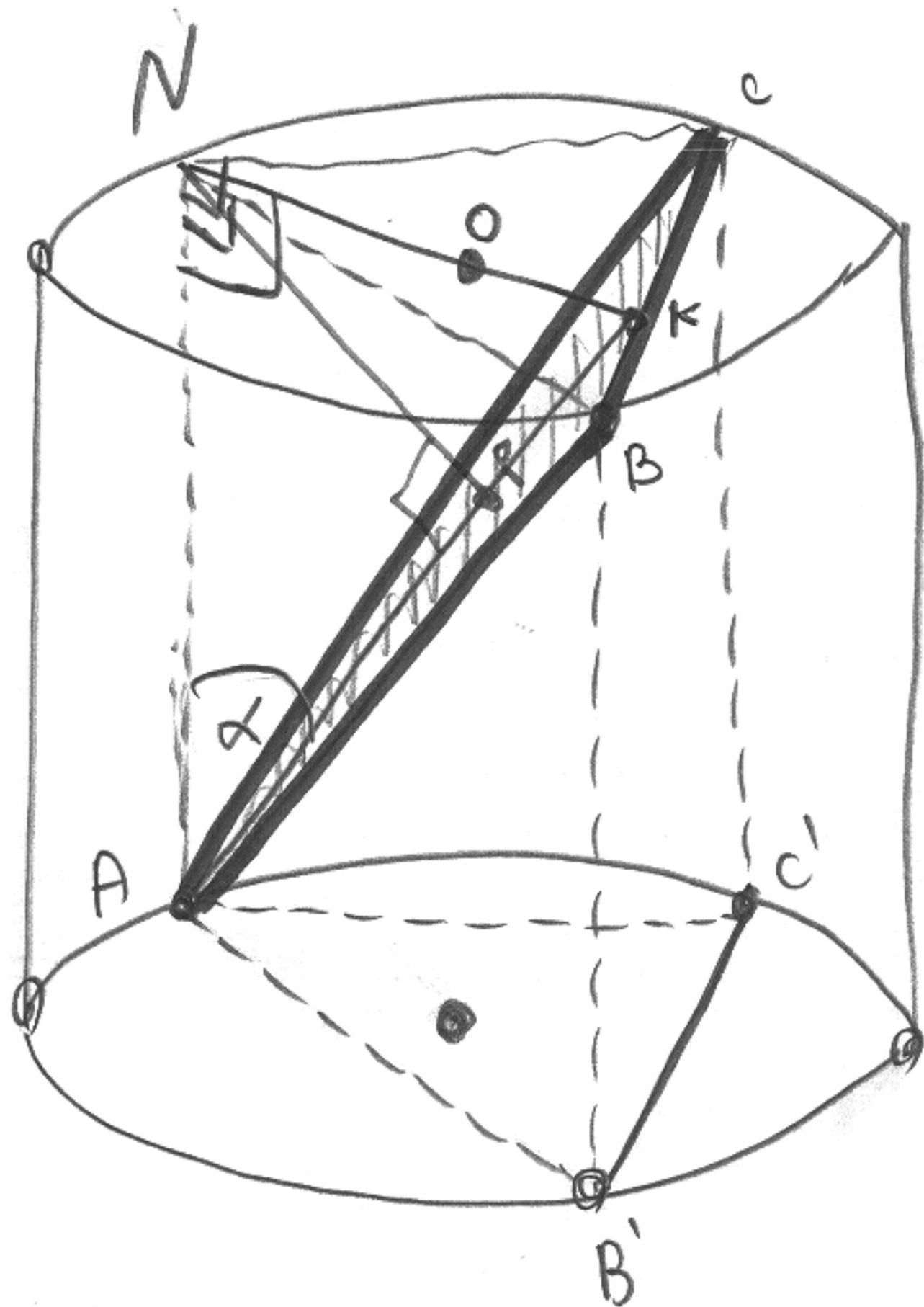


$$y' = \frac{2x \cdot x - 1(x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$\int_{-2}^{-1} (x - \frac{1}{x})^2 dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2 + x^{-2}) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{-2}^{-1}$$

$$\frac{8}{3} - \frac{11}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{5}{6} \pi$$

(8 ארבע)



$\vec{CN} \perp ABC$

(סמל)
 (כלל נוקמה)
 (כלל בקינה)

(C)

$$AN \perp NBC \Rightarrow \begin{cases} AN \perp NB \\ AN \perp NC \end{cases}$$

$$AB = AC = BC$$

$$\begin{cases} NB^2 = AB^2 - AN^2 \\ NC^2 = AC^2 - AN^2 \end{cases} \Rightarrow NB = NC$$

$BK = KC$ (D)

(התיכון כלל) $\vec{NB} \perp BC$
 (התיכון כלל) $\vec{NC} \perp BC$

$NK \perp BC$

$AK \perp BC$



$CB \perp KNA$

$ABC \perp KNA \Leftrightarrow ABC \perp \text{השטח } KNA$

(ABC, ANK) מישור מאלני בין מישורי ABC ו- ANK

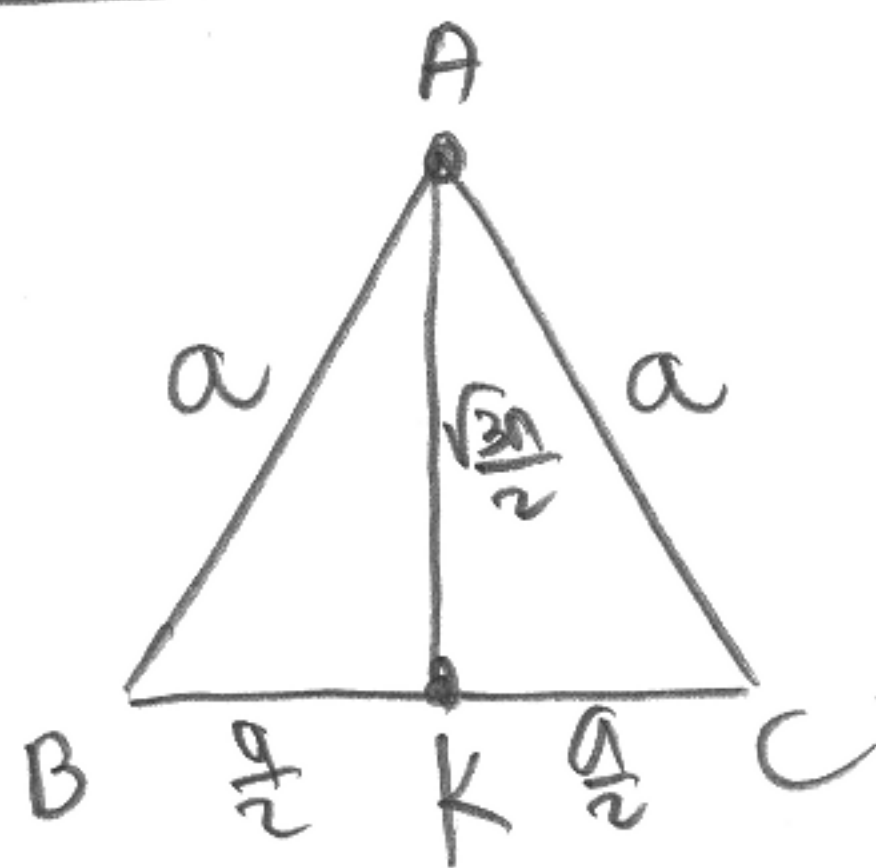
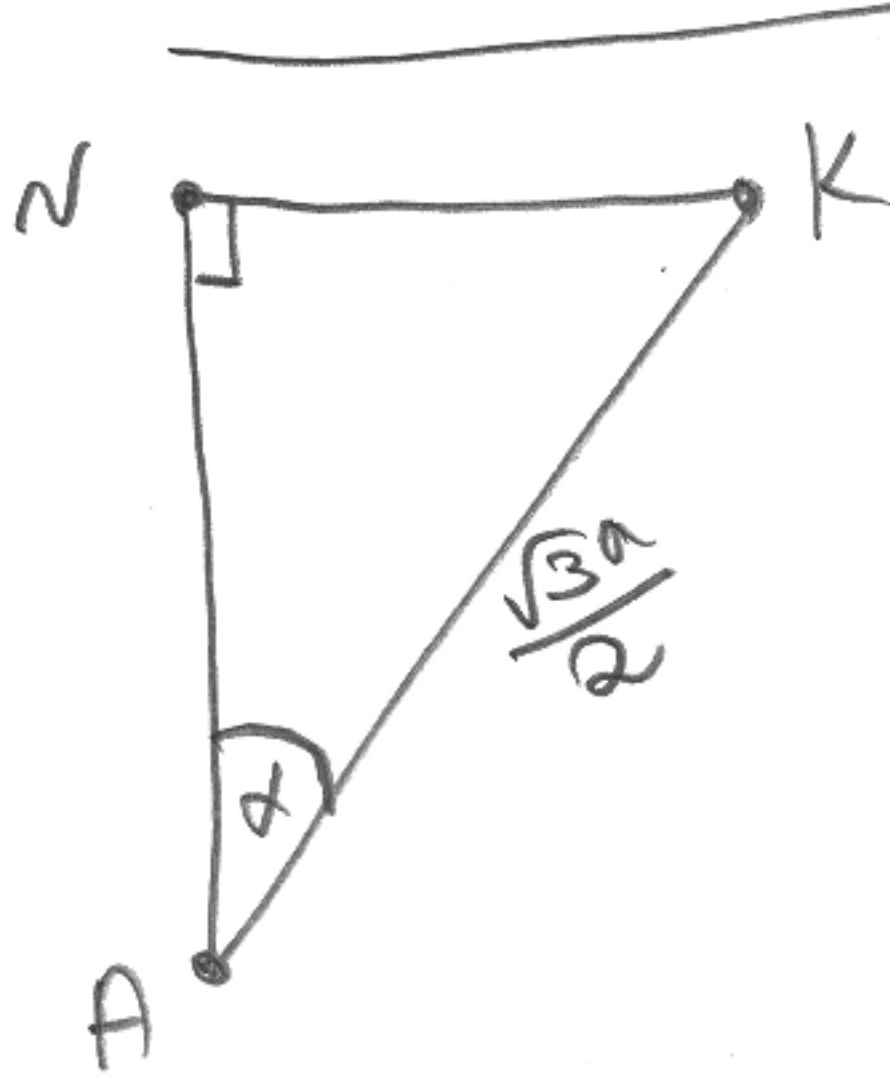
נגזר מנקודה N על AK עושה החותף בין המישורים

המאלני NP . NP מאלף עושה החותף בין

מישורי מאלני (על מאלף עושה מישור ABC)



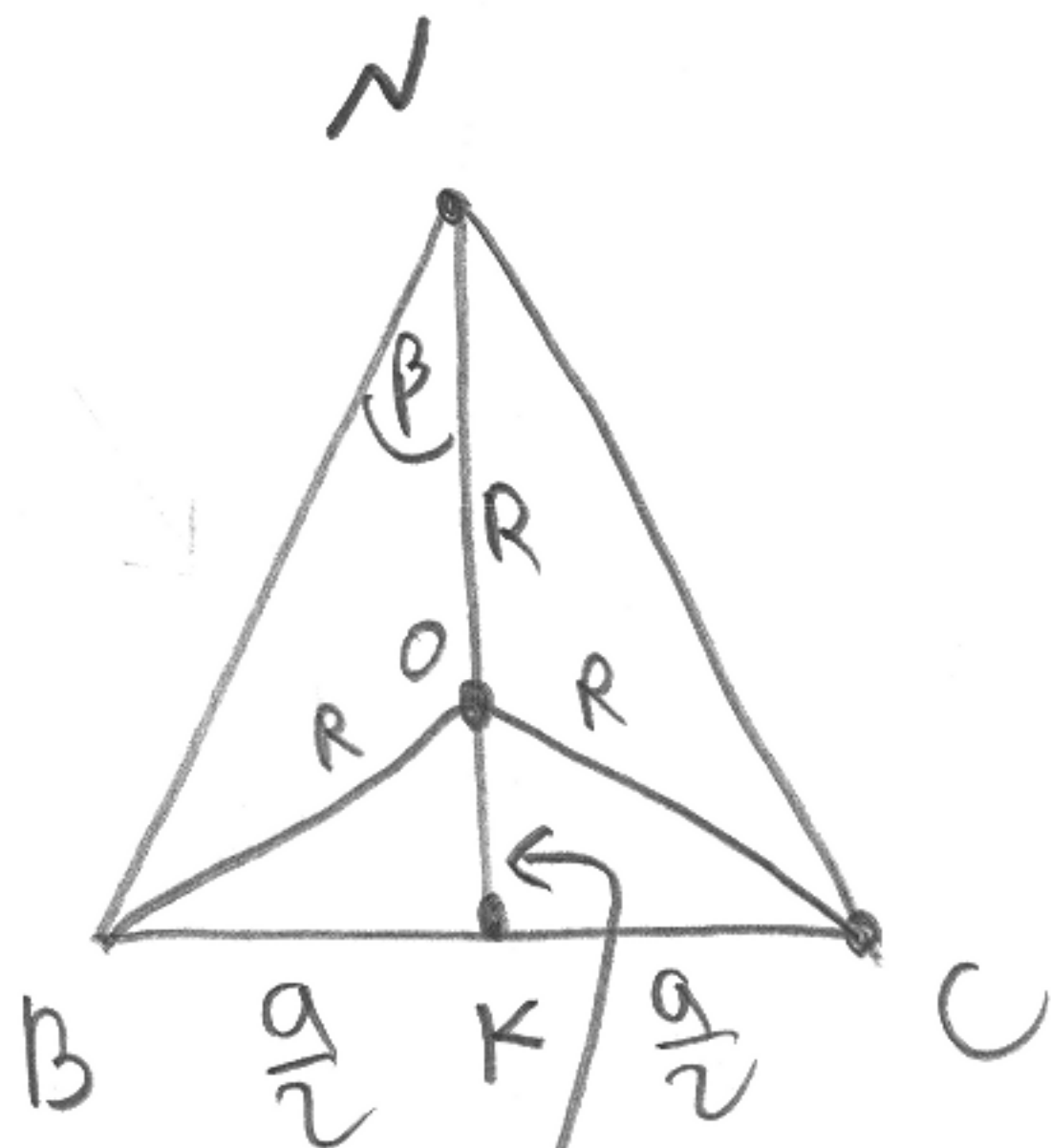
$$\alpha = \angle NAP = \angle NAK$$



$$\sin \alpha = \frac{NK}{\frac{\sqrt{3}a}{2}}$$

$$NK = \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin \alpha$$

ΔOKE o/k N



$$\frac{\sqrt{3}}{2} a \sin \alpha - R$$

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \sin \alpha - R \right)^2$$

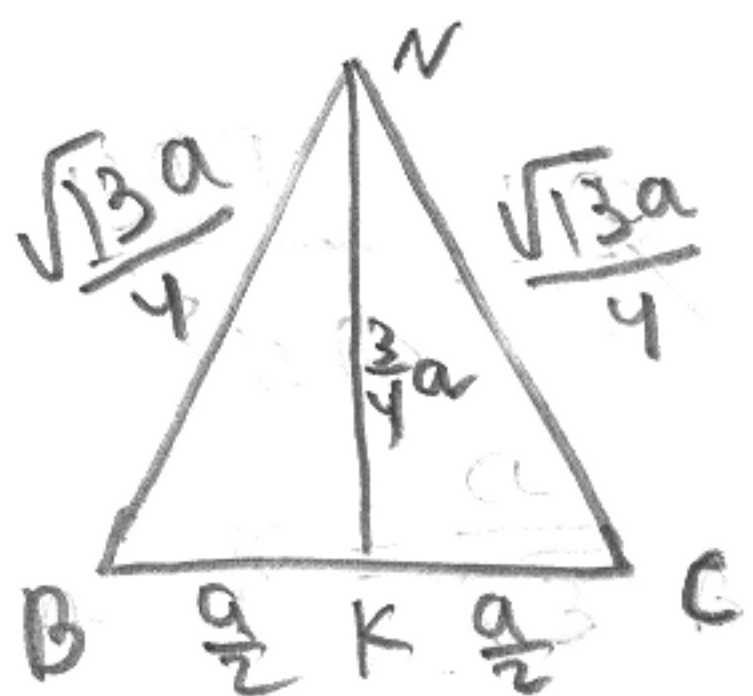
$$\cancel{R^2} = \frac{a^2}{4} + \frac{3}{4} a^2 \sin^2 \alpha - \sqrt{3} a R \sin \alpha + \cancel{R^2}$$

$$\sqrt{3} a R \sin \alpha = \frac{a^2}{4} (1 + 3 \sin^2 \alpha)$$

$$R = \frac{a (1 + 3 \sin^2 \alpha)}{4 \sqrt{3} \sin \alpha}$$

$\alpha = 60$

$$\alpha = 60 \Rightarrow NK = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} a$$



$$V = \frac{abc}{4R}$$

$$\frac{3}{4} a \cdot \frac{a}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 \cdot a^3}{4R}$$

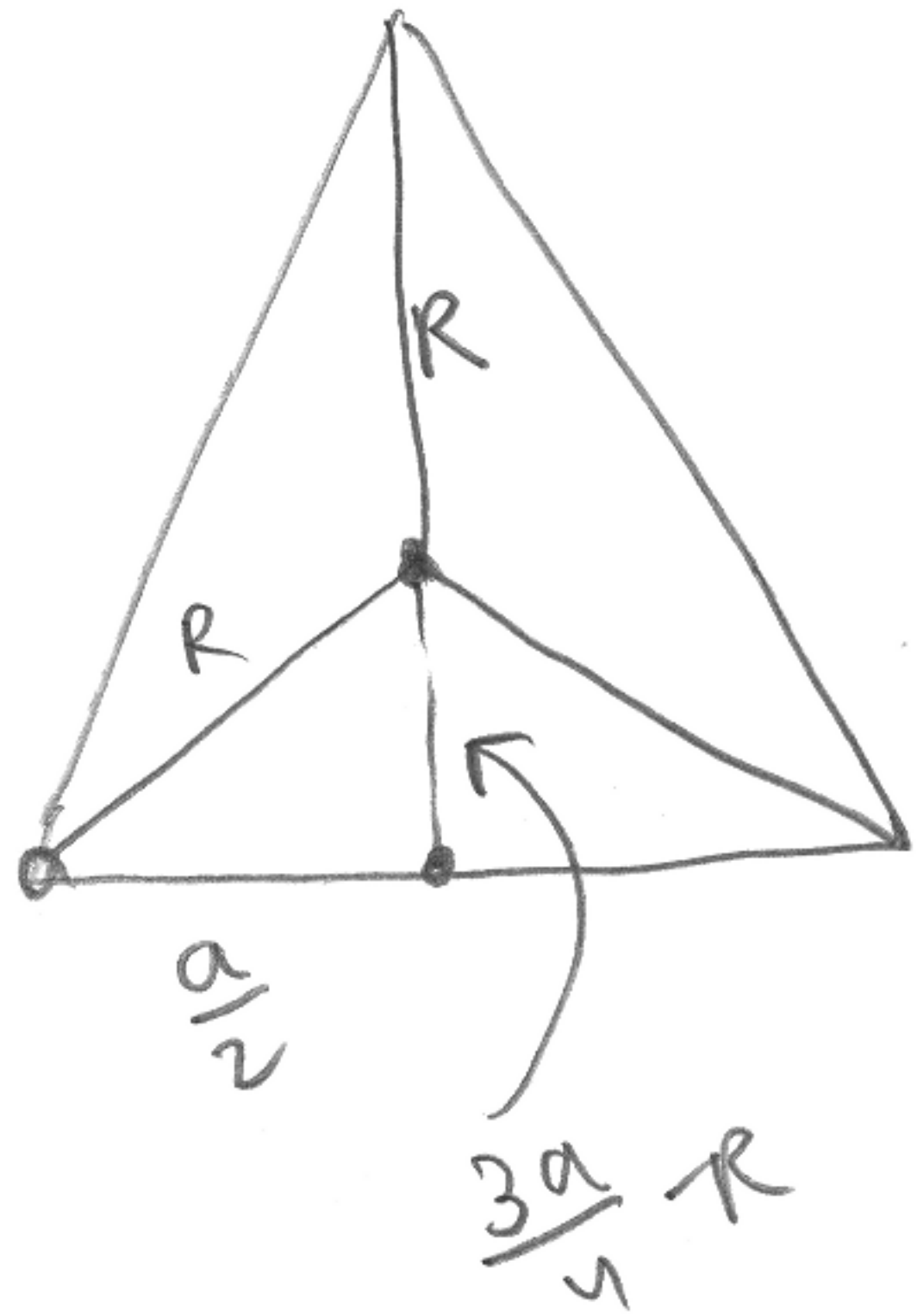
$$\frac{3a^2}{8} = \frac{13a^3}{4 \cdot 4 \cdot 4R}$$

$$R = \frac{13}{24} a$$

∞
↓

$$R = \frac{a (1 + \frac{9}{4})}{4 \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{\frac{13}{4} a}{6} = \frac{13}{24} a$$



$$R^2 = \frac{a^2}{9} + \left(\frac{3a}{4} - R\right)^2$$

$$R^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{9a^2}{16} - \frac{3a}{2}R + R^2$$

WAPD

$$\frac{3aR}{2} = \frac{13}{16}a^2$$

$$R = \frac{13}{24}a$$



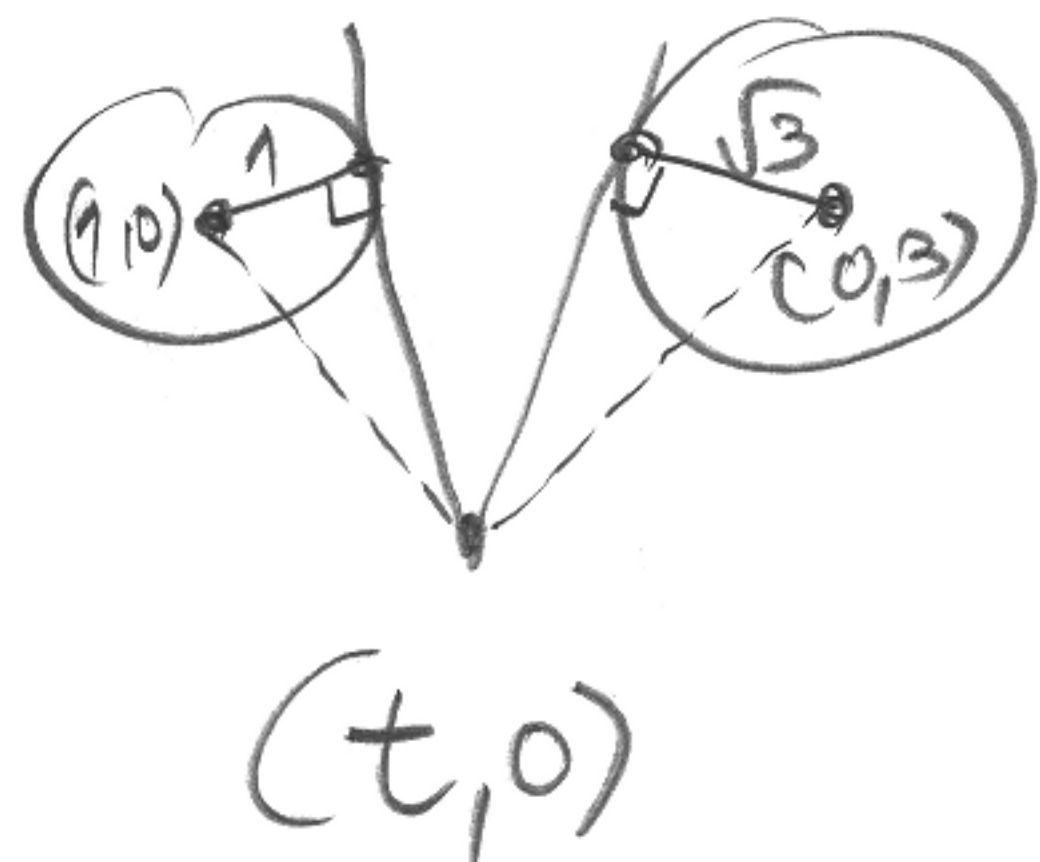
19 אדר

Ⓚ $x^2 + y^2 - 2x = 0$
 $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$$

$$x^2 + (y-3)^2 = -6 + 9$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 3$$



Ⓛ

$$(1-t)^2 - 1 = (0-t)^2 + (3-0)^2 - 3$$

$$x - 2t + t^2 - x = t^2 + 9 - 3$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$-2x + 6y - 6 = 0$$

$$x - 3y + 3 = 0$$

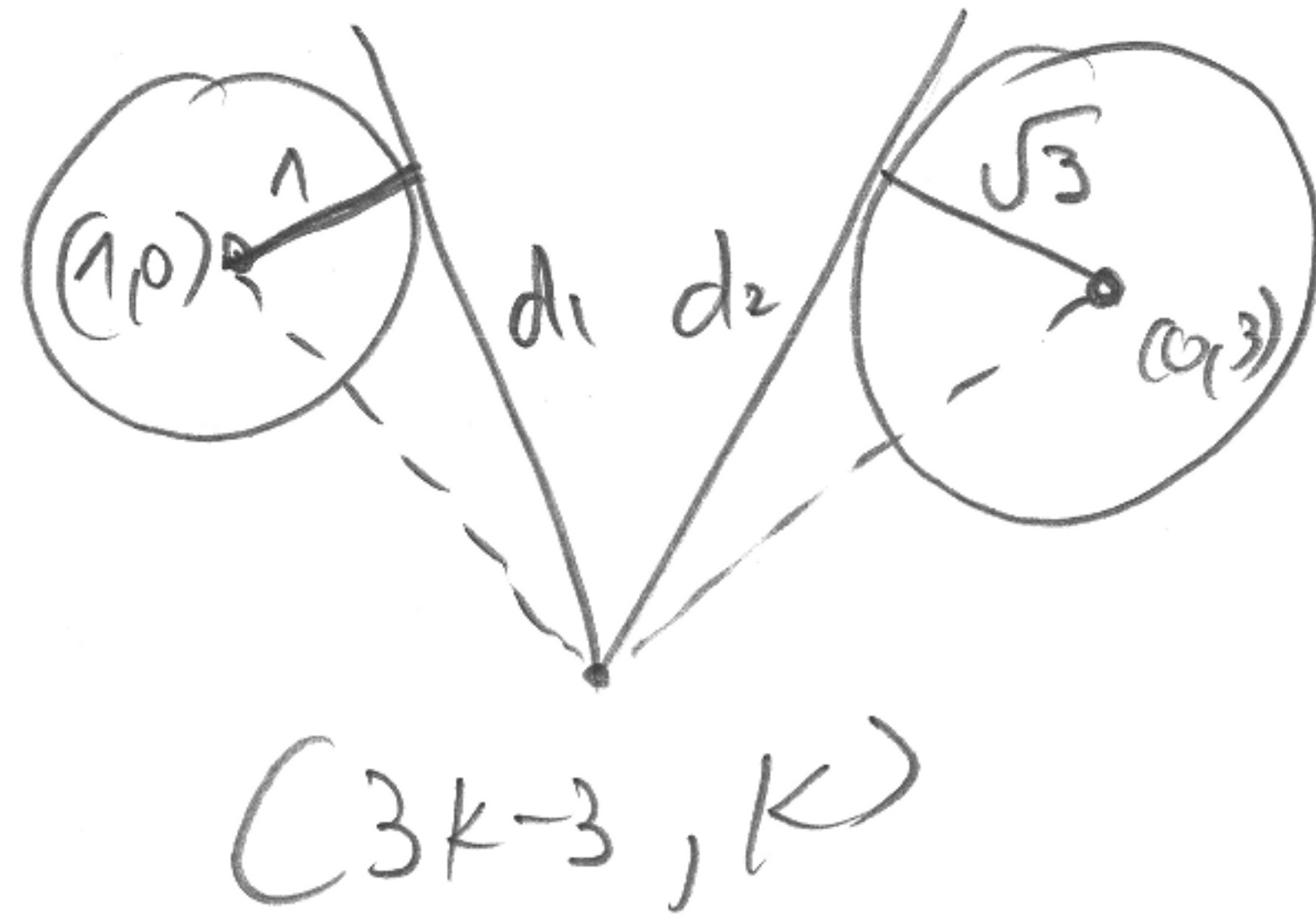
Ⓜ $x > 8$
 3/3 נקודות
 3/3 נקודות
 נקודות נפרדות
 2 נקודות

$$-6 = 2t$$

$$-3 = t \Rightarrow \boxed{(-3, 0)}$$

②

$$\begin{aligned} X-3y+3 &= 0 \\ X &= 3y-3 \\ (3k-3, k) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} d_1^2 &= (3k-3-1)^2 + (k-0)^2 - 1 \\ d_2^2 &= (3k-3-0)^2 + (k-3)^2 - 3 \end{aligned}$$

$$d_1^2 = 9k^2 - 24k + 16 + k^2 - 1 = 10k^2 - 24k + 15$$

$$d_2^2 = 9k^2 - 18k + 9 + k^2 - 6k + 9 - 3 = 10k^2 - 24k + 15$$

$$d_1^2 = d_2^2 \Rightarrow d_1 = d_2 \quad \underline{\underline{\text{SOLN}}}$$

① $z_1 = \sqrt[4]{8} \left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right)$ ②

$\sqrt[4]{8} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right)$
 $\sqrt[4]{8} \left(\cos \frac{3\pi}{8} - i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$
 $\sqrt[4]{8} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{8} \right)$

$z_2 = 1 + ai$
 $\sqrt{1+a^2} = R$
 $\operatorname{tg} \alpha = a$
 $\sqrt{1+a^2} \operatorname{cis} \alpha$

$$z_1^2 = z_2^3$$

$$\sqrt{8} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right) = (1+a^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{cis} 3\alpha$$

$$\left(\frac{8}{\sqrt{8}} \right)^2 = (1+a^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$8 = (1+a^2)^3 / \sqrt{8}$$

$$2 = 1+a^2$$

$$1 = a^2 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$a = 1 \Rightarrow 1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$z_2^3 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_1^2 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

✓

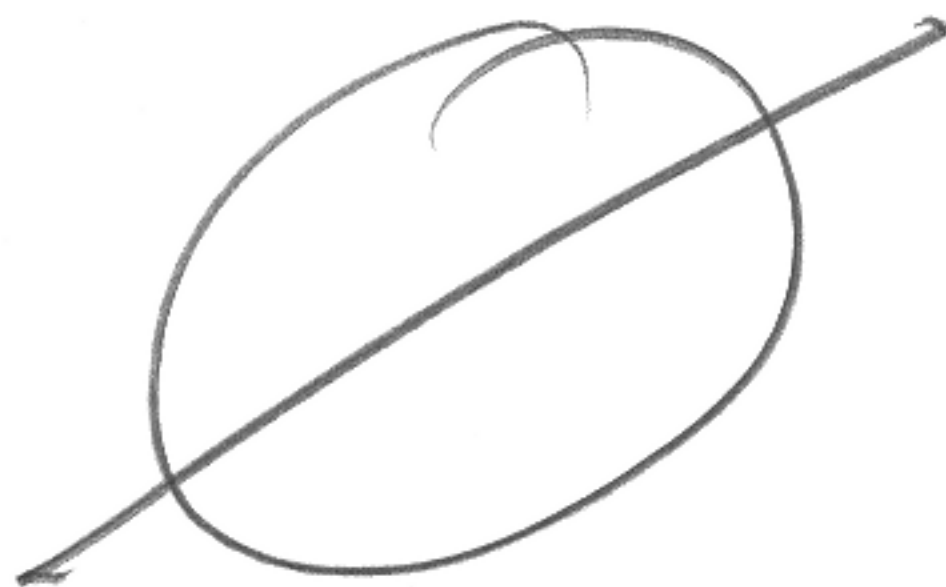
$$a = 1$$

$$a = -1 \Rightarrow 1 - i$$

$$z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2^3 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_1^2 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4}\right)$$



②

$$z^4 + 8zc = 0$$

$$z(z^3 + 8c) = 0$$

↓
 $z=0$

$$z^3 = -8c = 8 \operatorname{cis} 270$$

$$z = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} \left(\frac{270 + 360k}{3} \right)$$

$$z = 2 \operatorname{cis} (90 + 120k)$$

$$z = 2 \operatorname{cis} 90$$

$$z = 2 \operatorname{cis} 210$$

$$z = 2 \operatorname{cis} 330$$